

基于 HPM 视角的概率论与数理统计课程思政探究^{*}

——以正态分布为例

杨晓航

(河南工学院 理学部, 河南 新乡 453003)

摘要: 概率论与数理统计是高等学校数学类核心课程, 研究其课程思政对实现全课程育人有着重要意义。文章从 HPM 视角出发, 在兼顾数学逻辑性和科学性的同时, 展现了概率论与数理统计课程人文价值, 并通过选取正态分布的发展史料和现实应用, 展示了知识的产生和再创造过程, 增加了课程的趣味性。最后, 设计了一套新颖的正态分布教学策略。

关键词: HPM; 概率论与数理统计; 课程思政; 正态分布

中图分类号: G641

文献标识码: A

文章编号: 2096-7772(2023)06-0067-05

0 引言

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学课程, 旨在培养学生的概率思维和统计分析能力。概率论主要研究随机现象及统计规律性的数量关系, 而数理统计以概率论为基础, 研究如何有效地收集、整理和分析随机数据, 并做出统计推断。概率论与数理统计是当前很多重要的学科如金融学、信息学、人工智能等的基础, 其与生活实际关系紧密, 有极高的应用价值^[1]。基于数学史与数学教育 (History and Pedagogy of Mathematics, HPM) 视角, 在课堂上融入学科发展的历史与成就, 有利于与课程思政有机融合, 将传授知识、培养能力和塑造价值三者融为一体, 将教学引向更高的层次^[2]。

正态分布是一个在数学、物理等领域都非常重要的概率分布, 在统计学的许多方面有着重大的影响力。在进行正态分布教学时可深挖其发展史料, 这有利于学生深刻理解概率思想的形成过程, 化解他们对于正态分布概率密度函数的畏难情绪; 有助于激发学生的学习兴趣, 促进学生的人格养成, 实现

知识传授和价值引领的统一, 贯彻落实立德树人的根本任务^[3]。

1 教学背景

正态分布在概率论与数理统计中的地位十分特殊, 在学习了离散型随机变量之后, 正态分布作为最重要的连续型随机变量, 既是对前面内容的补充, 又是后续学习统计推断和假设检验的基础。正态分布是由二项分布发展而来的, 这一发展过程主要得益于数学家们对中心极限定理和误差分析的研究。中心极限定理的主要推动者是拉普拉斯, 他的研究对概率论领域产生了深远影响。而误差分析的主要推动者则是高斯, 他的研究主要集中在数理统计领域。正态分布的教学重点是正态分布概率密度曲线的特点和性质, 难点是利用正态分布解决生活实际问题。

概率密度函数概念十分抽象, 教材一般都未说明其是通过什么原理推导出来的, 学生无法将其和前置知识建立联系, 也无法体会正态分布在生活实际中的应用价值, 在学习时极易产生畏难情绪。基于 HPM 视角, 教师应预见学生的认知发展, 在教学中融入正态分布的发展历史, 让学生亲身体会概念

^{*} 收稿日期: 2023-09-07

基金项目: 河南省高等学校概率论与数理统计课程思政教学团队建设项目 (教高〔2020〕531 号文第 29 号); 河南省继续教育课程思政示范课程建设项目 (教职成〔2021〕138 号文第 179 号); 河南省线上线下混合式一流本科课程建设项目 (教高〔2022〕324 号第 411 号); 河南工学院教师教学创新项目 (cx2022-0050)

作者简介: 杨晓航 (1990—), 女, 河南新乡人, 讲师, 硕士, 主要从事应用数学研究。

的形成过程^[3]。

2 教学思路

在学习正态分布概率密度曲线前,学生已经学习了包括两点分别、二项分布和泊松分布在内的离散型随机变量以及均匀分布、指数分布两种连续型随机变量,并且在高中阶段对正态分布有了一定了解。在此基础之上,可基于 HPM 视角引出两条线

索,其一是通过棣莫弗(Abraham de Moivre)的故事介绍二项概率逼近,其二是通过高斯(Gauss)的故事介绍误差分析,两条线索都可导出正态分布,引导学生体会知识形成的过程^[4]。教师可先通过 GeoGebra 软件帮助学生直观认识正态分布密度曲线及两个参数对曲线的影响,进而讲解标准正态分布及 $\Phi(x)$ 函数表的查用,最后突破难点 3σ 准则及正态分布在生活中的应用。

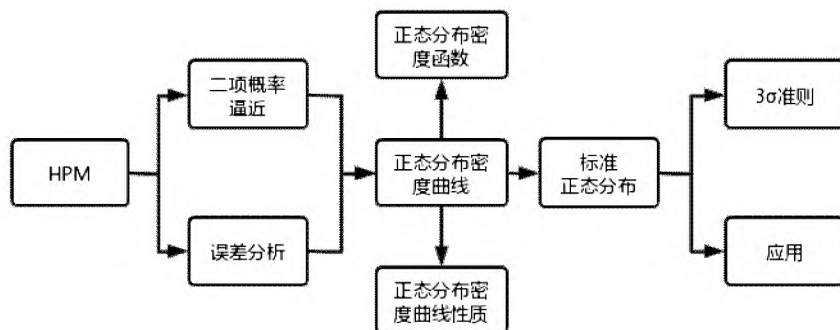


图 1 教学流程图

3 教学设计

3.1 引入历史,激发兴趣(附加式)

教师可采用附加式引入数学史的方法,在正式上课之前通过超星学习通平台向学生推送分组学习任务:探寻德国 10 马克钞票正面图案(图 2)背后的故事,并在课堂上相互分享。



图 2 德国 1993 年版 10 马克钞票正面

德国 1993 年版 10 马克钞票正面最主要的信息是数学家高斯画像和正态分布概率密度函数解析式

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

及图像。从学生的角度看,一位数学家和一个函数竟然被印在钞票上,自然会对其背景故事产生浓厚的兴趣,再结合这两个主要信息。通过作查阅资料,学生即可了解到高斯创造性地拓展了最小二乘法,使正态分布与最小二乘法相关联,并最终确定了正态分布在误差分析中的领导性地位这一重要发展过程。

教师在学生分享交流后,再对正态分布发展起源进行补充,棣莫弗(在 1770—1773 年从二项分布的逼

近中得到了正态分布概率密度函数。亚历山大·喀明向棣莫弗提出一个和赌博有关的问题: A、B 两人在甲家赌博,每局 A 赢的概率为 p , B 赢的概率为 $q=1-p$, 赌博一共进行 N 局,记 X 表示 A 赢的局数,约定如下:若 $X \geq Np$,则 A 付给甲 $X - Np$ 元;若 $X < Np$,则 B 付给甲 $Np - X$ 元,求甲所得的期望是多少^[5]? 当 Np 为整数时,记 $C_N p^i (1-p)^{N-i} = b(N, p, i)$, 甲的期望为 $2Np(1-p)b(N, p, Np)$ 。当 N 很大时,计算不易,棣莫弗想找到一个更方便计算的近似公式,于 1730 年对斯特林公式进行改进,得到当 $p = \frac{1}{2}$, $m = \frac{N}{2}$ 时:

$$\begin{aligned} b(m) &= \frac{(2m)!}{m!(2m-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \\ &\approx \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2m} \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{\left[\sqrt{2\pi \cdot m} \left(\frac{m}{e}\right)^m\right]^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \end{aligned}$$

1733 年,棣莫弗证明了当 N 足够大时, $\frac{b(m+i)}{b(m)} \rightarrow e^{-\frac{2i^2}{N}}$, 与上式结合后得到 $b(m+i) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-\frac{2i^2}{N}}$, 近似地以定积分代替和后得到:

$$\begin{aligned} P_d &= \sum_{|m-i| \leq d} b(i) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c_1}^{c_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &-\infty < c_1 < c_2 < +\infty \end{aligned}$$

正态分布的概率密度函数在上述的积分公式中出现了,二项分布的极限分布便是正态分布,同时,也为统计学史上占据重要地位的中心极限定理奠定了基础。附加式数学史的融入重演了正态分布的发现过程,可使学生认识到了正态分布在概率论与数理统计中的地位,对正态分布概念的形成有了整体的印象,也消除了学生的畏难情绪。

3.2 正态分布的发展(复制式)

在人教版高中数学教材选修 2-3 第二章第 4 节中介绍了高尔顿板(如图 3),即让一个小球从高尔顿板上方的通道口落下,小球在下落的过程中与层层小木块碰撞,最后掉入高尔顿板下方的某一球槽内。重复这个试验,以球槽的编号为横坐标,以小球落入的频率为纵坐标,画出频率分布直方图,随着重复次数的增加,频率直方图的形状会越来越像一条钟形曲线^[6]。紧接着,教材就直接给出了正态分布的概率密度函数 $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in (-\infty, +\infty)$ 。而大学教材则是在均匀分布、指数分布之后,同样直接给出了正态分布的概率密度函数及后续需要学生掌握的性质。两个阶段的教材都没有给学生探索高尔顿板和正态分布关系的机会。

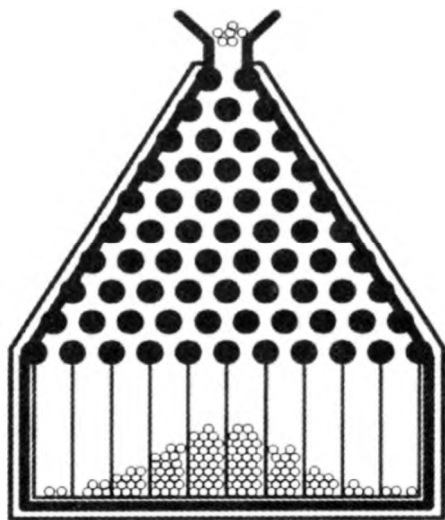


图3 高尔顿板

此时可以采用复制式的方法将数学史融入教学,即引导学生解决高尔顿板问题,深化学生对连续型随机变量概率密度函数的理解及正态分布的理解。可以通过以下三个问题进行引导:

(1)高尔顿板最直接推出的是二项分布,而不是正态分布,那它是如何趋于正态分布的?

(2)从二项分布到正态分布,主要问题是估计阶乘,能否参考附加式引入中介绍的棣莫弗的方法使

用斯特林公式解决?

(3)这个数学问题的解决使你对正态分布有了哪些不一样的认识?

在高尔顿板实验中,小球每随机自由下落一层都有向左或向右的可能,小球最终的落点受到一些因素的左右。类似地,在自然界中许多随机现象都受到各种干扰因素的影响,这些因素会影响事件的分布。然而,在这些干扰因素叠加的情况下,只要样本数量足够大,这些随机现象通常会遵循正态分布规律。教师重视数学知识的形成过程,引导学生追寻数学知识产生的思维轨迹,就更能他们感受数学之美,培养他们的数学精神。

3.3 依据现实情境,深入理解

学生已经加在高中阶段掌握了正态分布概率密度函数的性质,大学课堂上教师可以使用 Geogebra 软件画出正态分布概率密度图像(如图 4),并分别设置参数 μ 和 σ 的滑动条,通过动态演示直观展示两个参数值的改变对图形的下影响:

(1)曲线关于 $x = \mu$ 对称,当固定 σ ,改变 μ 的值,图形沿着 Ox 轴平移,而不改变形状。

(2)当 $x = \mu$ 时取得最大值 $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$,当固

定 μ ,改变 σ 的值, σ 越小图形越尖。

当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时为标准正态分布,有标准正态分布表可供查用,若随机变量 $X: N(\mu, \sigma^2)$,只要通过一个线性变换 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}: N(0, 1)$ 即可将其化成标准正态分布,进而查表解决概率求解问题。

此时,教师可以给出一个例题,建议选择身高、体重、成绩等与学生生活关系紧密的问题,突出正态分布应用价值的体现,例如。

公共汽车是人们日常出行经常使用的交通工具,请同学们帮忙设计公共汽车车门的高度,要求成年男性在上下车时与车门顶头碰头机会在小于 0.01 以下。设男子身高 $X: N(170, 6^2)$,车门的高度应如何确定?

设车门高度为 h 厘米。因为 $X: N(170, 6^2)$,所以 $\frac{X - 170}{6}: N(0, 1)$ 。故 $P\{X < h\} = P$

$\left\{ \frac{X - 170}{6} < \frac{h - 170}{6} \right\} = \Phi\left(\frac{h - 170}{6}\right) \geq 1 - 0.01 = 0.99$,查标准正态分布表可得 $\Phi(2.33) = 0.9901 \geq$

0.99,即 $\frac{h - 170}{6} = 2.33, h = 2.33 \times 6 + 170 \approx 184$ 厘

米。所以设计车门高度为 184 厘米时,可使男子与

车门碰头机会不超过 0.01,也即车门的最低高度应设计为 184 厘米。

借由此类例子引出 3σ 准则,教师可用 GeoGebra 软件绘制标准正态分布函数(如图 5),输入对应区间求得具体概率及填充颜色,向学生展示当 $X : N(0,1)$ 时, $P\{-1 \leq X \leq 1\} = 68.26\%$, $P\{-2 \leq X \leq$

$2\} = 95.44\%$, $P\{-3 \leq X \leq 3\} = 99.74\%$ 。

当 $X : N(\mu, \sigma^2)$ 时,仍然有 $P\{\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\} = 68.26\%$, $P\{\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\} = 95.44\%$, $P\{\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\} = 99.74\%$,随机变量 X 落在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 内几乎是肯定的事。

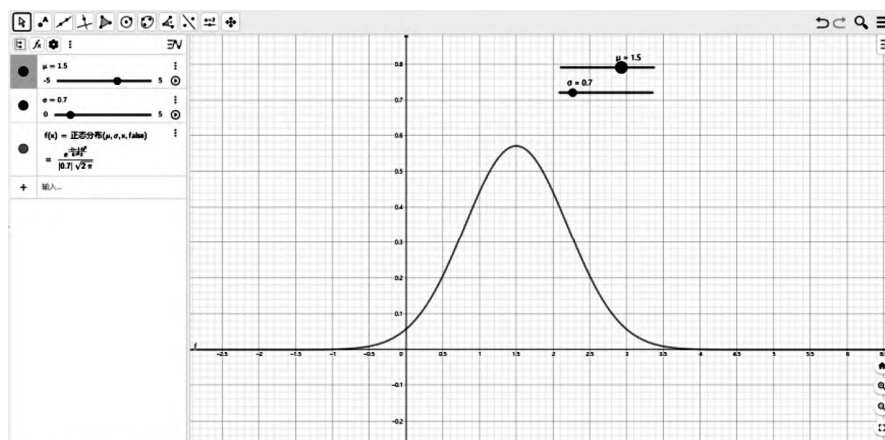


图 4 正态分布概率密度图像

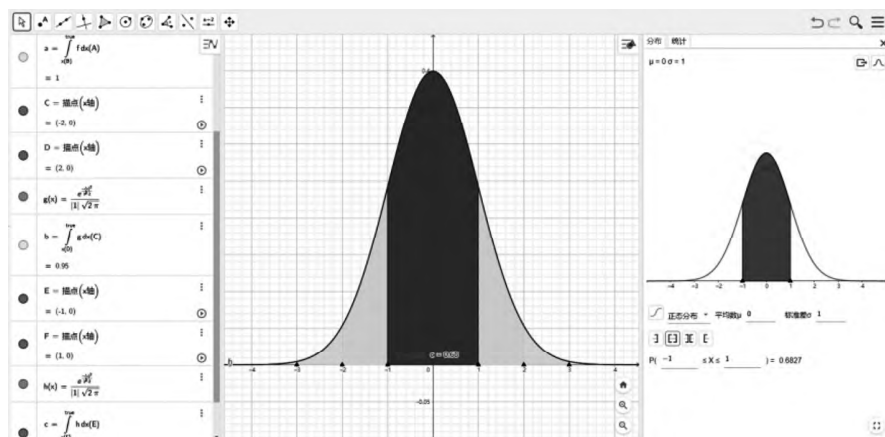


图 5 3σ 准则

4 小结

正态分布概率密度函数及分布函数看起来是非常复杂的,但它不是为了定义而定义,是为了解决我们生活中实际遇到的问题而定义的^[7]。数学史上还有许多和正态分布相似的定理,它们的发现往往历经艰辛,需要几代数学家的努力,而当学生直面一个严谨而抽象的定理时,教师应结合数学史将定理的形成过程展现给学生。这样既可以让系统而全面的接受知识,又可以促进学生数学思维的形成。学生意识到知识的形成是如此不易,会在被数学家百折不挠、不断探索的精神感染下,激发出对数学学习的热情。

(责任编辑 杨文忠)

参考文献:

- [1] 张坤珑. HPM 视角下的概率教学研究[D]. 曲阜:曲阜师范大学,2015.
- [2] 曾辰子,章海燕,左倩. HPM 视角下高等数学课程教学探究:以常数项无穷级数为例[J]. 中国多媒体与网络教学学报(上旬刊),2022(8):200-203.
- [3] 汪晓勤,欧阳跃. HPM 的历史渊源[J]. 数学教育学报,2003(3):24-27.
- [4] 杨许峰. 基于 HPM 下的高中概率教学设计研究[D]. 大连:辽宁师范大学,2022. [5] 李玲,徐章韬. 正态分布的教学设计:从历史中寻找学生认知生长点[J]. 数学教育学报,2023,32(2):12-17.
- [6] 人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中课程标准实验教科书数学选修 2-3[M]. 北京:人民教育出版社,2006:60.
- [7] 牟娟. 基于数学史的高中概率与统计的教学案例开发[D]. 兰

州:西北师范大学,2014.

Research on Curriculum Ideological and Political Education of Probability Theory and Mathematical Statistics from the Perspective of HPM: A Case of Normal Distribution

YANG Xiaohang

(School of Science, Henan Institute of Technology, Xinxian 453003, China)

Abstract: Probability theory and mathematical statistics are core courses in mathematics in higher education. The curriculum ideological and political education requires the full play of the educational role of the courses. It is of great significance to study the ideological and political education of probability theory and mathematical statistics for the realization of the whole curriculum education. From the perspective of HPM, it shows humanity and value while giving consideration to the logic and science of mathematics. By selecting historical materials and practical applications of Normal distribution, it shows the generation and recreation of knowledge, increases learnability and interest, and designs a set of novel teaching strategies of Normal distribution, which provides teaching case reference for Probability theory and mathematical statistics.

Key words: HPM; probability theory and mathematical statistics; curriculum ideological and political education; normal distribution

(上接第 66 页)

Research on the Problems and Countermeasures in the Development of Rural Tourism in Xinxian

ZHAO Xia, LIU Yuge

(School of Management, Henan Institute of Technology, Xinxian 453003, China)

Abstract: The existing problems such as imperfect infrastructure, non-standard management and imperfect brand construction have affected the high-quality development of rural tourism in Xinxian City. The lack of systematic planning and layout, the role of the government is not obvious and the lack of professional personnel are the main reasons for the above problems. Therefore, it is necessary to improve infrastructure, adhere to the guidance of the government, build a team of professional talents, and strengthen brand construction in order to achieve high-quality development of rural tourism in Xinxian City.

key words: rural vitalization; rural tourism; Xinxian