

# 关于 R-融合框架丢失问题

洪国庆<sup>1</sup>, 万林宾<sup>2</sup>, 张建霞<sup>3</sup>

(1. 河南工学院 理学部, 河南 新乡 453003; 2. 河南工学院 武装部, 河南 新乡 453003; 河南工学院 智能工程学院, 河南 新乡 453003)

**摘要:** 给定一个 Hilbert 空间中的 R-融合框架, 考虑移除一组元素后所产生的序列在什么条件仍是 R-融合框架, 即 R-融合框架丢失问题。特别地, 利用一个特殊的有界线性算子等价地刻画了一个给定的 R-融合框架, 并应用该结果给出了丢失后所产生的 R-融合框架的框架界。

**关键词:** 框架; R-融合框架; 线性算子; Hilbert 空间; 丢失

**中图分类号:** O177.2

**文献标志码:** A

**文章编号:** 2096-7772-(2024)02-0036-04

## 0 引言

框架是一种提供鲁棒、稳定且通常非唯一的向量表示系统, 广泛应用于函数空间刻画、信号和图像处理等众多领域<sup>[1,2]</sup>。向量是人们表达信号的最常用手段, 大部分信号都可以用向量的形式来表示和存储。对于给定的信号稀疏度  $s$ , 为了使近似解足够接近长度为  $N$  的原始信号, 随机亚高斯线性测量数量需要大于或近似等于  $s \log(N/s)$ <sup>[3,4]</sup>。然而, 在许多实际的场景中, 通常无法根据要恢复的信号稀疏度来选择测量数量。这些限制可能是由于多种原因造成的, 例如成本、频率和法律法规等<sup>[5,6]</sup>。在这些情况下, 传感设备的局限性加上信号中潜在的大量非零项使得先进的算法也无法恢复未知信号。

为了克服上述局限性, 作者在李鹏同教授的指导下, 将融合框架理论与压缩感知技术有机结合, 提出了 R-融合框架的概念<sup>[7]</sup>。这类框架不仅丰富了可用于分布式中继处理应用的数学模型, 同时改进了分布式稀疏模型<sup>[8,9]</sup>。近年来, 随着各种应用的发展, 许多学者对框架丢失问题进行了深入的研究。例如, Jiang 等给出了框架在丢失恢复中自定位鲁棒性的稳定性条件, 证明了关于可逆算子自定位鲁棒性是保持的<sup>[10]</sup>。Chen, Lv 和 Sun 引入了具有一致逼近性质的框架, 可以有效地从其框架系数中恢复信号, 而恢复

误差小于普通恢复算法<sup>[11]</sup>。本文主要研究 R-融合框架丢失问题。第一个研究重点是讨论移除 R-融合框架一组元素后所产生的序列在什么条件下仍是 R-融合框架。本文对一组元素丢失的 R-融合框架丢失问题给出了充分条件。本文的另一个研究重点是寻求给定 R-融合框架可以丢失任意组元素的等价刻画方法。通过使用与给定 R-融合框架的框架算子相关的有界线性算子等价地刻画了任意组数量元素的丢失问题。

本文的组织结构如下: 在第 1 部分中, 主要回顾了 R-融合框架的一些基本性质和用到的引理。在第 2 部分中, 主要讨论了任何给定 R-融合框架的丢失鲁棒性, 对一组元素丢失的 R-融合框架丢失问题给出了充分条件并给出了丢失多组元素后剩余部分仍然是 R-融合框架的等价条件。

## 1 预备知识

在本文中, 符号  $I, J$  表示一般可数或有限指标集。令  $H$  和  $M$  表示可分复 Hilbert 空间,  $B(H, M)$  表示从到的所有有界线性算子构成的集合。如果  $H=M$ , 则  $B(H, M)=B(H)$ 。符号  $I_H$  表示  $H$  上的恒等算子。对于一个有界线性算子  $T$ ,  $T^*$  表示  $T$  的伴随算子。如果  $W$  和  $V$  分别是  $H$  和  $M$  的闭子空间, 则分别令  $\pi_W \in B(H)$  和  $\tau_V \in B(M)$  表示在子空间  $W$  和  $V$  上的正交投影。

收稿日期: 2024-01-14

基金项目: 国家自然科学基金 (12301149); 河南省科技攻关项目 (242102321162); 河南省高等学校重点科研项目 (23B210005)

第一作者简介: 洪国庆 (1993—), 男, 河南新乡人, 讲师, 博士, 主要从事算子代数与框架理论研究。

**定义 1** 设  $T_i \in B(H, M)$  表示 Hilbert 空间  $H$  到  $M$  的一族有界线性算子,  $\{W_i\}_{i \in I}$  表示  $H$  的一族闭子空间,  $\{V_i\}_{i \in I}$  表示  $M$  的一族闭子空间,  $\{v_i\}_{i \in I}$  为一族权重. 若存在常数  $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$  使得

$$\alpha \|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} v_i^2 \|\tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f\|^2 \leq \beta \|f\|^2, \forall f \in H$$

成立, 则称序列  $\{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \in I}$  是 Hilbert 空间  $H$  的界为  $\alpha$  和  $\beta$  的 R-融合框架.

R-融合框架使用的相关表示空间是

$$R_{\ell^2} = \left( \sum \oplus V_i \right)_{\ell^2} = \left\{ \{f_i\}_{i \in I} \mid f_i \in V_i, \sum \|f_i\|^2 < \infty \right\}$$

其中内积定义为

$$\langle \{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I} \rangle = \sum \langle f_i, g_i \rangle, \quad \forall f_i, g_i \in V_i$$

设  $R = \{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \in I}$  是界为  $\beta$  的 Bessel R-融合序列, 定义分析算子

$$T_R : H \mapsto R_{\ell^2}, T_R f = \{v_i \tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f\}_{i \in I}, \forall f \in H$$

此时有

$$T_R^* f = \sum v_i \pi_{W_i} T_i^* f_i, \quad \forall f = \{f_i\}_{i \in I} \in R_{\ell^2}$$

称算子  $T_R^*$  为  $R$  的合成算子. 对一个 Bessel R-融合序列  $R$ , 可定义其 R-融合框架算子

$$S_R f = T_R^* T_R f = \sum v_i^2 \pi_{W_i} T_i^* \tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f, \quad \forall f \in H$$

此外, 若  $R$  是一个界为  $\alpha$  和  $\beta$  的 R-融合框架, 则有

$$\alpha I_H \leq S_R \leq \beta I_H$$

$$\text{设 } \hat{W}_i = S_R^{-1} W_i, \hat{T}_i = T_i \pi_{W_i} S_R^{-1}$$

称  $\hat{R} = \{(\hat{W}_i, V_i, \hat{T}_i, v_i)\}_{i \in I}$  是  $R$  的典则对偶 R-融合框架.

下面给出两个重要引理.

**引理 1**<sup>[12]</sup> 设  $R$  是 R-融合框架, 其典则对偶记为  $\hat{R}$ , 那么对任意满足

$$f = \sum v_i^2 \pi_{W_i} T_i^* g_i$$

的  $g_i \in V_i, i \in I$  都有

$$\sum \|g_i\|^2 = \sum v_i^2 \|\tau_{V_i} \hat{T}_i \pi_{\hat{W}_i} f\|^2 + \sum v_i^2 \|g_i - \tau_{V_i} \hat{T}_i \pi_{\hat{W}_i} f\|^2$$

**引理 2**<sup>[13]</sup> 设  $X$  是一个 Banach 空间, 并且  $T$  是  $X$  上的有界线性算子. 如果  $\|T\| < 1$ , 则  $I_X - T$  是  $X$  上的可逆算子且  $\|(I_X - T)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|T\|)$ .

## 2 主要结果

**定理 1** 设  $R = \{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \in I}$  是 Hilbert 空间  $H$  的界为  $\alpha$  和  $\beta$  的 R-融合框架,  $\hat{R} = \{(\hat{W}_i, V_i, \hat{T}_i, v_i)\}_{i \in I}$  是  $R$  的典则对偶 R-融合框架, 则

(1) 若存在  $0 \neq g \in V_j$  使得  $\tau_{V_j} \hat{T}_j \pi_{\hat{W}_j} \pi_{W_j} T_j^* \tau_{V_j} g = g$  且  $v_j = 1$ , 则  $R = \{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \neq j}$  是非 R-完全的.

(2) 若存在  $0 \neq f \in V_j$  使得  $\pi_{W_j} T_j^* \tau_{V_j} \hat{T}_j \pi_{\hat{W}_j} f = f$  且  $v_j = 1$ , 则  $R = \{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \neq j}$  是非 R-完全的.

(3) 若  $I_M - \tau_{V_j} T_j \pi_{W_j} \pi_{\hat{W}_j} \hat{T}_j^* \tau_{V_j}$  在  $V_j$  上是可逆算子,

则  $R = \{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \neq j}$  是  $H$  的 R-融合框架.

**证明:** (1) 因为  $\pi_{W_j} T_j^* g \in H$ , 由 R-融合框架重构公式可得  $\pi_{W_j} T_j^* g = \sum_{i \in I} v_i^2 \pi_{W_i} T_i^* \tau_{V_i} \hat{T}_i \pi_{\hat{W}_i} \pi_{W_j} T_j^* g$  因此,

$$\sum_{i \neq j} v_i^2 \pi_{W_i} T_i^* \tau_{V_i} \hat{T}_i \pi_{\hat{W}_i} \pi_{W_j} T_j^* g = 0$$

令  $u_{i,j} = \delta_{i,j} g$ , 则有

$$\pi_{W_j} T_j^* g = \sum_{i \in I} v_i^2 \pi_{W_i} T_i^* \tau_{V_i} u_{i,j}$$

由引理 1 可得

$$\sum_{i \in I} \|u_{i,j}\|^2 = \sum_{i \in I} v_i^2 \|\tau_{V_i} \hat{T}_i \pi_{\hat{W}_i} \pi_{W_j} T_j^* g\|^2 + \sum_{i \in I} v_i^2 \|\tau_{V_i} \hat{T}_i \pi_{\hat{W}_i} \pi_{W_j} T_j^* g - u_{i,j}\|^2$$

因此,

$$\|g\|^2 = \|g\|^2 + \sum_{i \in I} v_i^2 \|\tau_{V_i} \hat{T}_i \pi_{\hat{W}_i} \pi_{W_j} T_j^* g\|^2$$

且有

$$\tau_{V_i} \hat{T}_i \pi_{\hat{W}_i} \pi_{W_j} T_j^* g = 0$$

进一步有

$$\tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} S_R^{-1} \pi_{W_j} T_j^* g = \tau_{V_i} \hat{T}_i \pi_{\hat{W}_i} \pi_{W_j} T_j^* g = 0$$

但

$$g = \tau_{V_j} \hat{T}_j^* \pi_{\hat{W}_j} \pi_{W_j} T_j^* g = \tau_{V_j} T_j \pi_{W_j} S_R^{-1} \pi_{W_j} T_j^* g \neq 0$$

因此  $S_R^{-1} \pi_{W_j} T_j^* g \neq 0$ , 这说明  $R = \{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \neq j}$  是非 R-完全的.

(2) 由  $\pi_{W_j} T_j^* \tau_{V_j} \hat{T}_j \pi_{\hat{W}_j} f = f \neq 0$  可知  $\tau_{V_j} \hat{T}_j \pi_{\hat{W}_j} f \neq 0$

且

$$\tau_{V_j} \hat{T}_j \pi_{\hat{W}_j} \pi_{W_j} T_j^* \hat{T}_j \pi_{\hat{W}_j} f = \hat{T}_j \pi_{\hat{W}_j} f$$

根据 (1) 可知结论成立.

(3) 由 R-融合框架重构公式得对任意  $f \in H$ , 有  $\tau_{V_j} T_j \pi_{W_j} f = \sum_{i \in I} v_i^2 \tau_{V_j} T_j \pi_{W_j} \pi_{\hat{W}_i} \hat{T}_i^* \tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f$  因此,

$$\begin{aligned} (I_M - \tau_{V_j} T_j \pi_{W_j} \pi_{\hat{W}_j} \hat{T}_j^* \tau_{V_j}) \tau_{V_j} T_j \pi_{W_j} f &= \\ \sum_{i \neq j} v_i^2 \tau_{V_j} T_j \pi_{W_j} \pi_{\hat{W}_i} \hat{T}_i^* \tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f & \quad (*) \end{aligned}$$

另一方面观察到

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i \neq j} v_i^2 \tau_{V_j} T_j \pi_{W_j} \pi_{\hat{W}_i} \hat{T}_i^* \tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f \right\|^2 \\ &= \sup_{\|g\|=1, i \neq j} \left| \sum v_i^2 \langle \tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f, \tau_{V_i} \hat{T}_i \pi_{\hat{W}_i} \pi_{W_j} T_j^* g \rangle \right|^2 \\ &\leq \left( \sum_{i \neq j} v_i^2 \|\tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f\|^2 \right) \sup_{\|g\|=1, i \in I} \sum v_i^2 \|\tau_{V_i} \hat{T}_i \pi_{\hat{W}_i} \pi_{W_j} T_j^* g\|^2 \\ &\leq \hat{\beta} \|T_j\|^2 \left( \sum_{i \neq j} v_i^2 \|\tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f\|^2 \right) \end{aligned}$$

其中  $\hat{\beta}$  为  $\hat{R}$  的 R-融合框架界. 又由 (\*) 式可得

$$\|\tau_{V_j} T_j \pi_{W_j} f\|^2 \leq \hat{\beta} \|T_j\|^2 \|(I_M - \tau_{V_j} T_j \pi_{W_j} \pi_{\hat{W}_j} \hat{T}_j^* \tau_{V_j})^{-1}\|^2 \left( \sum_{i \neq j} v_i^2 \|\tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f\|^2 \right)$$

因此存在常数  $\gamma > 0$  使得

$$\sum_{i \in I} v_i^2 \|\tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f\|^2 \leq \gamma \sum_{i \neq j} v_i^2 \|\tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f\|^2$$

从而对任意的  $f \in H$ ,

$$\gamma \|f\|^2 \leq \sum_{i \neq j} v_i^2 \|\tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f\|^2 \leq \beta \|f\|^2$$

证毕。

令  $J \subset I$ ,  $R = \{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \in I}$  为 Bessel  $R$ -融合序列。定义算子

$$S_J: H \mapsto H, \quad S_J f = \sum_{i \in J} v_i^2 \pi_{W_i} T_i^* \tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f \quad \forall f \in H$$

易证  $S_J$  是  $H$  上的有界线性算子。

**定理 2** 设  $R = \{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \in I}$  是 Hilbert 空间  $H$  的界为  $\alpha$  和  $\beta$  的  $R$ -融合框架,  $S_R$  是  $R$  的  $R$ -融合框架算子, 则下列条件等价:

- (1)  $I_H - S_R^{-1} S_J$  是  $H$  上的可逆算子;
- (2)  $I_H - S_J S_R^{-1}$  是  $H$  上的可逆算子;
- (3)  $\{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \in I \setminus J}$  是  $H$  的  $R$ -融合框架。

此外, 若 (1) 或 (2) 成立, 则  $\{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \in I \setminus J}$  有下  $R$ -融合框架界

$$\alpha / \|(I_H - S_R^{-1} S_J)^{-1}\|^2$$

**证明:** (1)  $\Leftrightarrow$  (2) 设  $R = \{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \in I}$  是 Hilbert 空间  $H$  的界为  $\alpha$  和  $\beta$  的  $R$ -融合框架,  $J \subset I$ , 显然  $S_J$  是自伴算子。特别地,

$$(I_H - S_R^{-1} S_J)^* = I_H - S_J^* (S_R^{-1})^* = I_H - S_J S_R^{-1}$$

因此,  $I_H - S_R^{-1} S_J$  是  $H$  上的可逆算子当且仅当  $I_H - S_J S_R^{-1}$  是  $H$  上的可逆算子。

(1)  $\Leftrightarrow$  (3) 记  $\{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \in I \setminus J}$  的  $R$ -融合框架算子为  $S_{I \setminus J}$ , 则有

$$S_{I \setminus J} = S_R - S_J = S_R (I_H - S_R^{-1} S_J)$$

因此若  $\{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \in I \setminus J}$  是  $H$  的  $R$ -融合框架, 则  $S_{I \setminus J}$  是有界可逆算子。进一步有  $S_R (I_H - S_R^{-1} S_J)$  是有界可逆算子, 进而  $I_H - S_R^{-1} S_J$  是有界可逆算子。反之亦然。

下证定理“此外”部分。因为  $R$  是  $H$  的界为  $\alpha$  和  $\beta$  的  $R$ -融合框架, 对任意  $f \in H$  有

$$\begin{aligned} f &= S_R^{-1} S_R f \\ &= S_R^{-1} \left( \sum_{i \in J} v_i^2 \pi_{W_i} T_i^* \tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f + \sum_{i \in I \setminus J} v_i^2 \pi_{W_i} T_i^* \tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f \right) \\ &= S_R^{-1} S_J f + \sum_{i \in I \setminus J} v_i^2 S_R^{-1} \pi_{W_i} T_i^* \tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f \end{aligned}$$

从而

$$(I_H - S_R^{-1} S_J) f = \sum_{i \in I \setminus J} v_i^2 S_R^{-1} \pi_{W_i} T_i^* \tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f$$

进一步可得

$$\|(I_H - S_R^{-1} S_J) f\| \leq \alpha^{-1/2} \left( \sum_{i \in I \setminus J} v_i^2 S_R^{-1} \pi_{W_i} T_i^* \tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f \right)^{1/2}$$

即算子  $I_H - S_R^{-1} S_J$  是良定义的。若  $I_H - S_R^{-1} S_J$  是  $H$  上的可逆算子, 则对任意  $f \in H$  有

$$\begin{aligned} \|f\| &= \|(I_H - S_R^{-1} S_J)^{-1} (I_H - S_R^{-1} S_J) f\| \\ &\leq \|(I_H - S_R^{-1} S_J)^{-1}\| \|(I_H - S_R^{-1} S_J) f\| \end{aligned}$$

从而

$$\|f\| / \|(I_H - S_R^{-1} S_J)^{-1}\| \leq \|(I_H - S_R^{-1} S_J) f\| \quad \forall f \in H。$$

因此,

$$\alpha / \|(I_H - S_R^{-1} S_J)^{-1}\|^2 \|f\|^2 \leq \sum_{i \in I \setminus J} v_i^2 \|\tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f\|^2 \quad \forall f \in H$$

证毕。

**推论 1** 设  $R = \{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \in I}$  是 Hilbert 空间  $H$  的界为  $\alpha$  和  $\beta$  的  $R$ -融合框架,  $J \subset I$ 。若  $\|S_R^{-1} S_J\| < 1$ , 则  $\{(W_i, V_i, T_i, v_i)\}_{i \in I \setminus J}$  是  $H$  的界为  $\alpha(1 - \|S_R^{-1} S_J\|)^2$  和  $\beta$  的  $R$ -融合框架。

**证明:** 因为  $\|S_R^{-1} S_J\| < 1$ , 由引理 2 可知  $I_H - S_R^{-1} S_J$  是  $H$  上的可逆算子。对任意  $f \in H$  有

$$f = (I_H - S_R^{-1} S_J)^{-1} (I_H - S_R^{-1} S_J) f$$

从而

$$\|f\| = \|(I_H - S_R^{-1} S_J)^{-1}\| \|(I_H - S_R^{-1} S_J) f\|$$

再次使用引理 2 得

$$(1 - \|S_R^{-1} S_J\|) \|f\| \leq \|f\| / \|(I_H - S_R^{-1} S_J)\| \leq \|(I_H - S_R^{-1} S_J) f\|$$

因此

$$\alpha(1 - \|S_R^{-1} S_J\|)^2 \|f\|^2 \leq \sum_{i \in I \setminus J} v_i^2 \|\tau_{V_i} T_i \pi_{W_i} f\|^2 \quad \forall f \in H$$

证毕。

#### 参考文献:

- [1] DUFFIN R J, SCHAEFFER C. A class of nonharmonic fourier series[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1952, 72 (2):341-366.
- [2] GRÖCHENIG K H. Foundations of time-frequency analysis[M]. Boston: Birkhäuser, 2000.
- [3] FOUCART S, RAUHUT H. A mathematical introduction to compressive sensing[M]. Boston: Birkhäuser, 2013.
- [4] BOYER C, BIGOT J, WEISS P. Compressed sensing with structured sparsity and structured acquisition[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2019, 46 (2): 312-350.
- [5] ACESKA R, BOUCHOT J-L, LI S. Local sparsity and recovery of fusion frame structured signals[J]. Signal Processing, 2020, 174:107615.
- [6] ACESKA R, BOUCHOT J-L, LI S. Fusion frames and distributed sparsity[J]. Contemporary Mathematics, 2018, 706:47-61.
- [7] HONG G Q, LI P T. Relay fusion frames and bridging results for fusion frames[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 489:124124.
- [8] CHI X J, HONG G Q, LI P T. Some generalizations of relay fusion frames and (F,G)-relay fusion frames in Hilbert  $C^*$ -modules[J]. Journal of Mathematics, 2023, 5920210.
- [9] HONG G Q, LI P T. Relay fusion frames in Banach spaces[J]. Open Mathematics, 2023, 23(1):20220554.
- [10] JIANG Z, YANG S, ZHENG X. Perturbation and construction

- of almost self-located robust frames with applications to erasure recovery[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2021, 44(8):7333–7342.
- [ 11 ] CHEN T, LV F, SUN W. Uniform approximation property of frames with applications to erasure recovery[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2022, 21(3):1093–1107.
- [ 12 ] HONG G Q, LI P T. Relay fusion frames for Hilbert spaces[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2019, 226.
- [ 13 ] CHRISTENSEN O. An introduction to frames and Riesz bases[M]. Applied and Numerical Harmonic Analysis, Boston: Birkhäuser, 2016.

## On the Problem of R-fusion Frames Erasure

HONG Guoqing<sup>1</sup>, WAN Linbin<sup>2</sup>, ZHANG Jianxia<sup>3</sup>

( 1. School of Science, Henan Institute of Technology, Xinxing 453003, China;

2. Armed Forces Department, Henan Institute of Technology, Xinxing 453003, China;

3. School of Intelligent Engineering, Henan Institute of Technology, Xinxing 453003, China )

**Abstract:** Given an R-fusion frame in a Hilbert space, we consider the condition under which the sequence produced after removing a set of elements remains the R-fusion frame, that is, the R-fusion frame erasure problem. In particular, a special bounded linear operator is used to equivalently characterize that a given R-fusion frame is robust to the erasure of any set of elements, and the frame bound of the resulting R-fusion frame is given.

**Key words:** frame; R-fusion frame; linear operator; Hilbert space; erasure

( 责任编辑 吕春红 )

( 上接第 31 页 )

## Study on Mechanical Performance of CoW/ZrO<sub>2</sub> Composite Film Prepared by Pulse Electrodeposition

ZHANG Cuijie<sup>1</sup>, WANG Wenlong<sup>2</sup>, ZHAO Jingyun<sup>1</sup>

( 1. Teaching Department of Engineering and Technology, Henan Institute of Technology, Xinxing 453003, China; 2. School of Mechanical Engineering, Henan Institute of Technology, Xinxing 453003, China )

**Abstract:** The pulse plating technology was used to prepare CoW/ZrO<sub>2</sub> composite film on the surface of Q235B steel. Influence rule of ZrO<sub>2</sub> nano particles addition amount in plating solution on the quality of coating and friction and wear property were researched. Some CoW/ZrO<sub>2</sub> composite plating were gained by changing additive amount of ZrO<sub>2</sub> nano particles under a certain conditions using single factor experiment, the surface morphology of CoW/ZrO<sub>2</sub> composite film was observed by scanning electron microscope (SU5000), the microstructure of the CoW/ZrO<sub>2</sub> composite film was examined by X-ray diffraction, Thickness and surface roughness of CoW/ZrO<sub>2</sub> composite film were tested by surface profiler P7, quality of the coating and its change rule of the variation with the addition amount of ZrO<sub>2</sub> nano particles in the plating solution was investigated and the tribological properties of the coatings were tested. There is best effect of additive amount of ZrO<sub>2</sub> nano particles in the plating solution on the quality of coating, there is a minimum wear rate when the additive amount of ZrO<sub>2</sub> nano particles changes within limit. The wear resistance and surface hardness of the composite film generated from the plating bath with 9 g/L ZrO<sub>2</sub> are the best during the preparation of CoW/ZrO<sub>2</sub> composite plating by the pulse plating technology.

**Key words:** pulse plating technology; CoW/ZrO<sub>2</sub>; composite film; friction and wear properties

( 责任编辑 王磊 )