

Rayleigh–Plesset 方程的一个新的参数解析解

秦玉鹏^{1,2}, 张 泉³, 王 烁³, 金 昊³, 王龙翔³, 蒋润龙³

(1. 河南工学院 理学部, 河南 新乡 453003; 2. 河南工学院 非线性优化算法研究所, 河南 新乡 453003;
3. 河南工学院 车辆与交通工程学院, 河南 新乡 453003)

摘要: 通过构造合适的变换, 推导了理想流体中描述单个球形气泡周期脉动的 Rayleigh–Plesset 方程的一个新的参数解析解。通过与前人结果和数值解的对比, 证明了该参数解析解的有效性。作为该参数解析解的直接应用, 给出了脉动周期的解析表达式。最后, 结合具体初值条件分析和讨论了气泡的运动规律。

关键词: 气泡; Rayleigh–Plesset 方程; 变换; 参数解析解; 周期

中图分类号: O352

文献标志码: A

文章编号: 2096-7772-(2025)01-0031-04

0 引言

气泡广泛存在于工程应用中, 比如船舶螺旋桨气泡、高压气枪气泡、破冰气泡和水下爆炸气泡等^[1-4]。在球形气泡动力学方面, 人们根据气泡所处物理环境的不同, 先后建立了诸多微分方程模型, 比如 Rayleigh–Plesset (RP) 方程^[5]、Keller–Miksis (KM) 方程^[6]等。为了深入研究气泡的动力学特性和运动规律, 对气泡动力学方程进行求解是至关重要的。实际上, 研究人员已经开发了多种非线性解析方法(包括近似解析方法)对气泡方程进行了求解, 比如多尺度方法^[7]、同伦分析方法^[8]、分段微分变换法^[9]和参数解析解方法^[10-12]等。

本文考虑如下理想流体中描述单个球形气泡周期脉动的 RP 方程^[10]

$$\rho \left(R R_{TT} + \frac{3}{2} R_T^2 \right) = P_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa} - p \quad (1)$$

式中: R 表示气泡半径, T 表示时间, P 表示流体密度, P_0 表示泡内不可凝结气体初始分压, R_0 表示气泡初始半径, κ 表示绝热(多方)指数, p 表示远场压力。

本文的主要目的是通过构造合适的变换给出 RP 方程(1)在 $\kappa = 3/2$ 时的一个新的参数解析解。本文

结构如下: 首先, 给出 RP 方程(1)的无量纲形式; 其次, 通过引入合适的变换, 将气泡方程转化为一个椭圆函数方程, 进而应用 Weierstrass 椭圆函数构造气泡方程在 $\kappa = 3/2$ 时的一个新的参数解析解, 并给出脉动周期的解析表达式; 接着, 分析和讨论气泡脉动的参数解析解和周期解析表达式; 最后, 给出本文的结论。

1 无量纲控制方程

引入无量纲变量 $r = R/R_0$, $t = T/\omega_0^{1/2}$, 方程(1)变为

$$r r_{tt} + \frac{3}{2} r_t^2 = \frac{1}{3\kappa} (r^{-3\kappa} - \beta) \quad (2)$$

式中: $\beta = p/P_0$, $\omega_0^2 = 3\kappa P_0/(\rho R_0^2)$ (气泡脉动的固有频率)。

2 参数解析解

考虑 $\kappa = 3/2$ 的情形, 将方程(2)两端乘以 $2r^2 r_t$ 并积分, 则

$$r_t^2 = -\frac{8}{27} r^{-9/2} - \frac{4}{27} \beta + C_1 r^{-3} \quad (3)$$

式中: C_1 为常数, 它可以由初值条件确定。比如考虑初值条件

收稿日期: 2024-08-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(12202139); 河南省科技研发联合基金青年科学家项目(235200810063); 河南省科技攻关项目(242102310429)

第一作者简介: 秦玉鹏(1989—), 男, 河南新乡人, 副教授, 博士, 主要从事水动力学及非线性解析方法研究。

$$r(0)=1, r_t(0)=0 \quad (4)$$

$$\text{此时 } C_1 = \frac{8}{27} + \frac{4}{27}\beta。$$

不难发现方程 (3) 的右侧出现了负幂次项。为了消除该负幂次项并建立方程 (3) 与椭圆函数方程的联系, 本文借助如下变换

$$dt = r^\delta d\tau, \quad r = v^\varepsilon \quad (5)$$

式中: v 和 τ 表示新的变量, δ 和 ε 是待确定的常数。此时首次积分方程转化为

$$v_\tau^2 = -\frac{8}{27\varepsilon^2} v^{-\frac{13}{2}\varepsilon+2+2\delta\varepsilon} - \frac{4\beta}{27\varepsilon^2} v^{-2\varepsilon+2+2\delta\varepsilon} + \frac{C_1}{\varepsilon^2} v^{-5\varepsilon+2+2\delta\varepsilon} \quad (6)$$

在文献 [10] 中, 作者选择 $\delta=5/2$, $\varepsilon=-2/3$ 构造了方程 (2) 在 $\kappa=3/2$ 时的参数解析解。本文发现, 除了上述选择外, 还可以选择 $\delta=7/4$, $\varepsilon=2/3$ 。在该取值下, 方程 (6) 变为

$$v_\tau^2 = -\frac{\beta}{3} v^3 + \frac{9C_1}{4} v - \frac{2}{3} \quad (7)$$

实际上, 方程 (7) 的解可以用 Weierstrass 椭圆函数 $\wp(*;*,*)$ 表示为

$$v(\tau) = -\wp\left(\frac{\sqrt{3\beta}}{6}(\tau-\tau_0); \frac{27C_1}{\beta}, \frac{8}{\beta}\right) \quad (8)$$

式中: τ_0 为常数, 同样可由初值条件确定。更多关于椭圆函数的内容, 可参考文献 [10-12]。结合变换 (5), 则可得无量纲 RP 方程 (2) 在 $\kappa=3/2$ 时的关于参数的解析解

$$r(\tau) = \left[-\wp\left(\frac{\sqrt{3\beta}}{6}(\tau-\tau_0); \frac{27C_1}{\beta}, \frac{8}{\beta}\right)\right]^{2/3} \quad (9)$$

$$t(\tau) = \int_0^\tau r(\zeta)^{7/4} d\zeta$$

式中: ζ 为积分变量。式 (9) 即是本文获得的新的参数解析解。

3 脉动周期解析表达式

作为参数解析解 (9) 的一个直接应用, 下面将给出气泡脉动周期的解析表达式。

由参数解析解 (9) 中的第一个式子可知气泡半径 r 是关于参数 τ 的周期函数, 且周期为对应的 Weierstrass 椭圆函数的周期。实际上, 对于椭圆函数 $\wp(\tau; g_2, g_3)$, 其周期为

$$\int_{e_1}^{\infty} \frac{dw}{\sqrt{(w-e_1)(w-e_2)(w-e_3)}}$$

或

$$2\int_{e_1}^{\infty} \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}}$$

式中: e_1 、 e_2 和 e_3 是方程 $4w^3 - g_2w - g_3$ 的三个根。不妨设参数解析解 (9) 中的 Weierstrass 椭圆函数的周期为 τ_{gas} , 则

$$\tau_{\text{gas}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\beta}} \int_{e_1}^{\infty} \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - \frac{27C_1}{\beta}w - \frac{8}{\beta}}} \quad (10)$$

最后, 结合参数解析解 (9) 中的第二个式子可知气泡半径 r (对时间 t) 的脉动周期的解析表达式为

$$t_{\text{gas}} = \int_0^{\tau_{\text{gas}}} \left[-\wp\left(\frac{\sqrt{3\beta}}{6}(\tau-\tau_0); \frac{27C_1}{\beta}, \frac{8}{\beta}\right) \right]^{7/6} d\zeta \quad (11)$$

4 分析与讨论

本小节将对参数解析解 (9) 和脉动周期解析表达式 (11) 进行分析, 并借此讨论气泡的动力学特性和运动规律。

首先验证参数解析解 (9) 的有效性。在文献 [10] 中, 作者给出了无量纲 RP 方程 (2) 在 $\kappa=3/2$ 时的如下形式解析解

$$r(\tau) = \left[\frac{9C_1}{8} - \wp\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(\tau-\tau_0); g_2, g_3\right) \right]^{-2/3} \quad (12)$$

$$t(\tau) = \int_0^\tau r(\zeta)^{5/2} d\zeta$$

式中:

$$g_2 = 3\left(\frac{9C_1}{4}\right)^2$$

$$g_3 = 2\beta - \left(\frac{9C_1}{4}\right)^3$$

若考虑初值条件 (4), 并选择 $\beta=2$, 则 $C_1 = \frac{16}{27}$, 此时参数解析解 (9) 和 (12) 变为

$$r(\tau) = \left[-\wp\left(\frac{\sqrt{6}}{6}(\tau-3.6360531281); 8, 4\right) \right]^{2/3} \quad (13)$$

$$t(\tau) = \int_0^\tau \left[-\wp\left(\frac{\sqrt{6}}{6}(\tau-3.6360531281); 8, 4\right) \right]^{7/6} d\zeta$$

和

$$r(\tau) = \left[\frac{2}{3} - \wp\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(\tau+2.785272164-3.4591389701); \frac{16}{3}, \frac{44}{27}\right) \right]^{-2/3}$$

$$t(\tau) = \int_0^\tau \left[\frac{2}{3} - \wp\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(\tau+2.785272164-3.4591389701); \frac{16}{3}, \frac{44}{27}\right) \right]^{-5/3} d\zeta \quad (14)$$

这里, $\beta=2$ 表示远场压力和泡内不可凝结气体初始分压之比为 2:1。同理, 若考虑初值条件 (4), 并选择 $\beta=1/2$, 则 $C_1 = \frac{10}{27}$, 此时参数解析解 (9) 和 (12)

变为

$$r(\tau) = \left[-\wp \left(\frac{\sqrt{6}}{12} (\tau + 3.929742511 - 5.871667040i); 20, 16 \right) \right]^{2/3} \quad (15)$$

$$t(\tau) = \int_0^\tau r(\zeta)^{7/4} d\zeta$$

和

$$r(\tau) = \left[\frac{5}{12} - \wp \left(\frac{1}{\sqrt{6}} (\tau - 4.448231777i); \frac{25}{12}, \frac{91}{216} \right) \right]^{-2/3} \quad (16)$$

$$t(\tau) = \int_0^\tau r(\zeta)^{5/2} d\zeta$$

下面借助解析表达式 (10) 和 (11) 讨论气泡的脉动周期。同样考虑初值条件 (4), 并选择 $\beta = 2$ 和 $\beta = 1/2$, 此时易得方程 (13) 和 (15) 中 Weierstrass 椭圆函数的周期为 $\tau_{\text{gas}} = 4.9452891$ 和 $\tau_{\text{gas}} = 7.8594850$, 进而借助表达式 (11) 可得气泡脉动周期 $t_{\text{gas}} = 3.8515550$ 和 $t_{\text{gas}} = 10.465687$ 。

图 1—图 3 根据参数解析解 (13) 和 (14) 分别绘制了对应的 $r-\tau$ 曲线、 $t-\tau$ 曲线和 $r-t$ 曲线。通过图 3 参数解析解 (13) 和 (14) 以及数值解的对比, 不难发现三者吻合良好, 这说明本文获得的参数解析解 (9) 和 (13) 是有效的。图 4 绘制了参数解析解 (15) 和 (16) 及其与数值解的对比图像, 这也说明了参数解析解 (9) 和 (15) 的有效性。另外, 通过图 3 和图 4 的对比可知, $r=1$ 是气泡半径在 $\beta=2$ 时的最大值, 从初始时刻开始先做压缩运动, 而气泡半径 $r=1$ 却是 $\beta=1/2$ 时的最小值, 即从初始时刻开始先做生长运动。

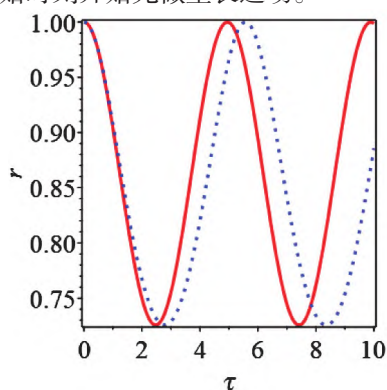


图 1 本文参数解析解 (13)【实线】和文献 [10] 参数解析解 (14)【点线】中的 $r-\tau$ 曲线对比

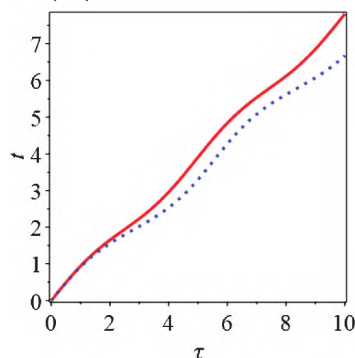


图 2 本文参数解析解 (13)【实线】和文献 [10] 参数解析解 (14)【点线】中的 $t-\tau$ 曲线对比

另外, 根据获得的参数解析解还可以模拟气泡脉动速度的演化情况。图 5 给出了参数解析解 (13) 对应的速度演化曲线。不难发现, 气泡脉动速度呈现周期变化, 气泡半径达到最大/最小值时, 脉动速度为零。

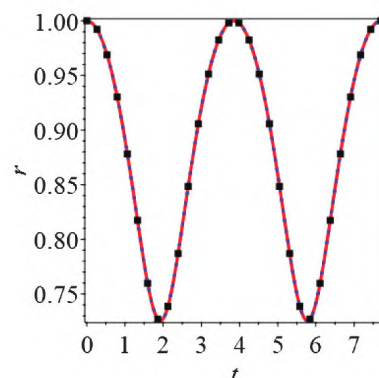


图 3 本文参数解析解 (13)【实线】、文献 [10] 参数解析解 (14)【点线】和数值解【实心正方形】图像对比

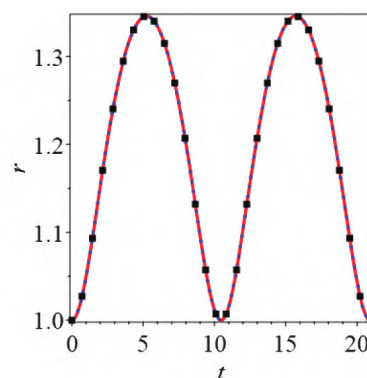


图 4 本文参数解析解 (15)【实线】、文献 [10] 参数解析解 (16)【点线】和数值解【实心正方形】图像对比

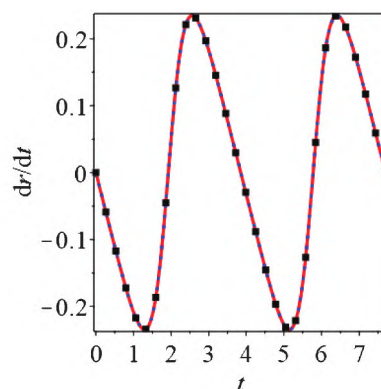


图 5 图 3 对应的气泡脉动速度演化曲线

5 结语

本文研究了理想流体中单个球形气泡周期脉动的 RP 方程。通过构造合适的变换, 得到了 RP 方程的一个新的参数解析解。该解析解是由 Weierstrass 椭圆函数表示的。通过该解析解, 构造了气泡脉动周期的解析表达式。结果表明, 当远场压力和泡内不可凝结气

体初始分压之比大于 1 时, 初始半径 (脉动速度为 0 时) 为最大半径, 气泡从初始时刻先做压缩运动; 当远场压力和泡内不可凝结气体初始分压之比小于 1 时, 初始半径 (脉动速度为 0 时) 为最小半径, 气泡从初始时刻先做生长运动。

参考文献:

- [1] Zhang A M, Li S M, Cui P, et al. A unified theory for bubble dynamics [J]. *Physics of Fluids*, 2023, 35: 033323.
- [2] 张阿漫, 张帅. 高压气枪气泡动力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2020.
- [3] 姚熊亮, 汪玉, 张阿漫. 水下爆炸气泡动力学 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2012.
- [4] Wang S P, Zhang A M, Liu Y L, et al. Bubble dynamics and its applications [J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2018, 30: 975–991.
- [5] Rayleigh L. Viii. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity [J]. *Philosophical Magazine*, 1917, 34: 94–98.
- [6] Keller J, Miksis M. Bubble oscillations of large amplitude [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1980, 68: 628–633.
- [7] Smith W R, Wang Q X. Radiative decay of the nonlinear oscillations of an adiabatic spherical bubble at small Mach number [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, 837: 1–18.
- [8] Wang Z, Qin Y P, Zou L. Analytical solutions of the Rayleigh–Plesset equation for N-dimensional spherical bubbles [J]. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2017, 60: 104721.
- [9] Qin Y P, Wang Z, Zou L, et al. Semi-numerical, semi-analytical approximations of the Rayleigh equation for gas-filled hyper-spherical bubble [J]. *International Journal of Computational Methods*, 2019, 16: 1850094.
- [10] Kudryashov N A, Sinelshchikov D I. Analytical solutions of the Rayleigh equation for empty and gas-filled bubble [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2014, 47: 405202.
- [11] Mancas S C, Rosu H C, Hsieh C C. Radius evolution for bubbles with elastic shells [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, 103: 106003.
- [12] Qin Y P, Wang Z, Zou L. Analytical solutions and dynamic behaviors to synchronous oscillation of same bubbles at vertices of cuboid and rectangle [J]. *Physics of Fluids*, 2023, 35: 082004.

A New Parametric Analytical Solution for the Rayleigh–Plesset Equation

QIN Yupeng^{1,2}, ZHANG Quan³, WANG Shuo³, JIN Hao³, WANG Longxiang³,
JIANG Runlong³

(1. School of Science, Henan Institute of Technology, Xinxiang 453003, China; 2. Institute of Nonlinear Optimization Algorithms, Henan Institute of Technology, Xinxiang 453003, China; 3. School of Vehicle and Traffic Engineering, Henan Institute of Technology, Xinxiang 453003, China)

Abstract: By establishing appropriate transformations, a new parametric analytical solution of the Rayleigh–Plesset equation for the periodic pulsation of a single spherical bubble in an ideal fluid is derived. By comparing with the previous one and numerical solution, the effectiveness of the new

parametric analytical solution is demonstrated. As a direct application of the analytical solution, an analytical expression for the pulsation period is provided. Finally, the above analytical results are analyzed and discussed in conjunction with specific initial conditions.

Key words: bubble; Rayleigh–Plesset equation; transformation; parametric analytical solution; period

(责任编辑 吕春红)