

由弱 H -Hopf 模代数构造 Rota-Baxter 代数

刘琳琳

(河南工学院 理学部, 河南 新乡 453003)

摘要: 给出弱 H -Hopf 模代数的定义及其构造定理, 进而由弱 H -Hopf 模代数出发构造 Rota-Baxter 代数并提供具体的例子。

关键词: Rota-Baxter 代数; 弱 Hopf 代数; 弱 H -Hopf 模代数

中图分类号: O153.3

文献标志码: A

文章编号: 2096-7772-(2024)01-0035-03

0 引言

Rota-Baxter 代数也称 Baxter 代数, 由一个结合代数和线性算子组成, 该算子满足微积分中的分部积分公式。20 世纪 60 年代, Rota-Baxter 代数起源于随机理论, 21 世纪以来 Rota-Baxter 代数不仅应用于概率论和组合方面, 并且在数学物理中也得到了广泛的应用, 如 dendriform 代数、自由 Rota-Baxter 代数、李代数、多 zeta 值、量子场论中的 Connes-Kreimer 重整化理论等。

Hopf 代数与 Rota-Baxter 代数密切相关。2014 年, Jian^[1] 利用模代数构造了 Hopf 模代数并得到相应的 Rota-Baxter 代数; 基于 Hopf 代数理论的对偶思想, Ma 和 Liu^[2] 给出其对偶的结果; 2020 年, Zheng 等人^[3] 从模代数、Doi-Hopf 模出发给出 Rota-Baxter 代数的构造。弱 Hopf 代数是 Hopf 代数的一类重要的推广形式, 随着对弱 Hopf 代数研究的不断深入, Hopf 代数中的一些重要结果都有其“弱”的形式, 但弱 Hopf 代数的结构要比一般的 Hopf 代数复杂。基于此, 本文将 [1] 中的主要结果推广至弱 Hopf 代数, 由弱 H -Hopf 模代数构造 Rota-Baxter 代数。

在本文中, 假设所有的向量空间, 线性映射和张量积都定义在特征为 0 的域 K 上。

1 预备知识

本节我们回顾弱 Hopf 代数的相关定义。

定义 1^[4] 弱 Hopf 代数是一个六元组 $(H, \mu, 1_H, \Delta, \varepsilon, S)$ 简记为 H , 其中 $(H, \mu, 1_H)$ 是一个结合代数, (H, Δ, ε) 是一个余结合余代数, $S: H \rightarrow H$ 是一个线性映射, 对于任意的 $f, g, h \in H$ 满足

$$\begin{aligned}\Delta(hg) &= \Delta(h)\Delta(g) \\ (\Delta \otimes id)\Delta(1_H) &= 1_1 \otimes 1'_1 1'_2 \otimes 1'_2 = 1_1 \otimes 1_2 1'_1 \otimes 1'_2 \\ \varepsilon(fgh) &= \varepsilon(fg_1)\varepsilon(g_2h) = \varepsilon(fg_2)\varepsilon(g_1h) \\ h_1S(h_2) &= \varepsilon(1_1h)1_2, S(h_1)h_2 = \varepsilon(h1_2)1_1, S(h) = S(h_1)h_2S(h_3)\end{aligned}$$

定义线性映射为, $\varepsilon_t, \varepsilon_s: H \rightarrow H$ 为 $\varepsilon_t(h) = \varepsilon(1_1h)1_2$, $\varepsilon_s(h) = \varepsilon(h1_2)1_1$, 分别称为靶映射和源映射, 记它们的像分别为 $H_t = \varepsilon_t(H)$ 和 $H_s = \varepsilon_s(H)$ 。

定义 2^[4] 设 H 是一个弱 Hopf 代数, 向量空间 M 称为弱右 H -Hopf 模, 若 $(M, \cdot)$ 是一个右 H -模, (M, ρ_r) (对任意 $m \in M$, 记 $\rho_r(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$) 是一个右 H -余模, 满足

$$\rho_r(m \cdot h) = m_{(0)} \cdot h_1 \otimes m_{(1)}h_2$$

其中: $h \in H, m \in M$ 。

注释 1 设 M 是一个弱右 H -Hopf 模, 记 M^{coH} 为右余不变量子空间, 即

$$M^{coH} = \{m \in M \mid \rho(m) = m \cdot 1_1 \otimes 1_2\}$$

由文献 [4] 知, 映射 $P_r: M \rightarrow M$, $P_r(m) = m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})$, 是从 M 到 M^{coH} 的投射。

定义 3^[5] 设 H 是一个弱 Hopf 代数。(左-左) Yetter-Drinfeld 模是一个三元组 $(M, \cdot, \rho_l)$, 其中 $(M, \cdot)$ 是一个左 H -模, (M, ρ_l) (对任意 $m \in M$, 记 $\rho_l(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$) 是一个左 H -余模, 满足

收稿日期: 2023-11-07

基金项目: 国家自然科学基金 (12301023)

作者简介: 刘琳琳 (1990—), 女, 河南夏邑人, 讲师, 博士, 主要从事 Hopf 代数研究。

$$1_1 m_{(-1)} \otimes 1_2 \cdot m_{(0)} = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$$

$$h_1 m_{(-1)} \otimes h_2 \cdot m_{(0)} = (h_1 \cdot m)_{(-1)} h_2 \otimes (h_1 \cdot m)_{(0)}$$

其中: $h \in H, m \in M$ 。对应的 Yetter-Drinfeld 范畴记为 ${}^H_H \text{WYD}$ 。

注释 2 若代数 $(A, \mu) \in {}^H_H \text{WYD}$, 则 (A, μ) 是弱左 H -模代数和弱左 H -余模代数, 即满足

$$h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$$

$$(ab)_{(-1)} \otimes (ab)_{(0)} = a_{(-1)} b_{(-1)} \otimes a_{(0)} b_{(0)}$$

其中: $h \in H, a, b \in A$ 。

Smash 积代数 $A \# H$ 定义在向量空间 $A \otimes_{{H_1}} H$ 上, 其中 H 关于乘法是左 H_1 -模, A 关于模作用 $a \cdot z = S^{-1}(z) \cdot a$ 是右 H_1 -模, $A \# H$ 上的乘法为

$$(a \# h)(b \# g) = a(h_1 \cdot b) \# h_2 g$$

其中: $h, g \in H, a, b \in A$ 。

定义 4^[6] 二元组 (A, R) 称为权为 $\lambda \in K$ 的 Rota-Baxter 代数, 若 A 是一个结合代数, 且线性映射 $R: A \rightarrow A$ 满足

$$R(a)R(b) = R(R(a)b + aR(b) + \lambda ab)$$

其中: $a, b \in A$ 。此时称 R 为 A 上权为 $\lambda \in K$ 的 Rota-Baxter; 算子, 若 $R^2 = R$, 则称 R 为幂等的 Rota-Baxter 算子。

例 1 设 H 为弱 Hopf 代数, 则 (H, ε_l) 和 (H, ε_s) 均是权为 -1 的 Rota-Baxter 代数。事实上, 由

$$\begin{aligned} \varepsilon_l(\varepsilon_l(h)g) &= \varepsilon_l(h)\varepsilon_l(g) \text{ 和 } \varepsilon_l(h\varepsilon_l(g)) = \varepsilon_l(hg) \text{ 知} \\ \varepsilon_l(\varepsilon_l(h)g + h\varepsilon_l(g) - hg) &= \varepsilon_l(\varepsilon_l(h)g) + \varepsilon_l(h\varepsilon_l(g)) - \varepsilon_l(hg) \\ &= \varepsilon_l(h)\varepsilon_l(g) + \varepsilon_l(hg) - \varepsilon_l(hg) \\ &= \varepsilon_l(h)\varepsilon_l(g) \end{aligned}$$

因此 (H, ε_l) 是权为 -1 的 Rota-Baxter 代数。同理可证 (H, ε_s) 也是权为 -1 的 Rota-Baxter 代数。

2 Rota-Baxter 代数的构造

为了构造 Rota-Baxter 代数, 首先给出弱右 H -Hopf 模代数的定义。

定义 5 弱右 H -Hopf 模代数是一个二元组 (M, μ) , 其中 M 是一个弱右 H -Hopf 模, $\mu: M \otimes M \rightarrow M$ (记 $\mu(m \otimes n) = mn$) 是一个结合乘法, 满足

$$(mn) \cdot h = m(n \cdot h)$$

$$\rho_r(mn) = m_{(0)} n_{(0)} \otimes m_{(1)} n_{(1)}$$

其中: $h \in H, m, n \in M$ 。

下面给出本节的主要结果。

定理 1 设 (M, μ) 是一个弱右 H -Hopf 模代数, 且对任意的 $m, n \in M$ 满足 $(m \cdot 1_1)(n \cdot S(1_2)) = mn$ 。则 (M, P_r) 是一个权为 -1 的幂等的 Rota-Baxter 代数。

证 对于任意的 $m \in M$, 我们有

$$\begin{aligned} P_r^2(m) &= P_r(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})) \\ &= (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}))_{(0)} \cdot S((m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}))_{(1)}) \\ &= m_{(0)(0)} \cdot (S(S(m_{(1)1})m_{(1)2})S(m_{(0)(1)})) \\ &= m_{(0)(0)} \cdot (S(\varepsilon_s(m_{(1)}))S(m_{(0)(1)})) \\ &= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)1}\varepsilon_s(m_{(1)2})) = m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) = P_r(m) \end{aligned}$$

因此 $P_r^2 = P_r$ 。对于任意的 $m, n \in M$, 可知

$$\begin{aligned} P_r(mn) &= (mn)_{(0)} \cdot S((mn)_{(1)}) \\ &= (m_{(0)}n_{(0)}) \cdot S(m_{(1)}n_{(1)}) = (m_{(0)}P_r(n)) \cdot S(m_{(1)}) \end{aligned}$$

故 $P_r(mP_r(n)) = P_r(mn)$ 。利用上述两个结论, 我们有

$$\begin{aligned} P_r(mP_r(n)) + P_r(P_r(m)n) - P_r(mn) &= (P_r(m)n)_{(0)} \cdot S((P_r(m)n)_{(1)}) \\ &= (P_r(m)_{(0)}n_{(0)}) \cdot (S(n_{(1)})S(P_r(m)_{(1)})) \\ &= (P_r(m)_{(0)}P_r(n)) \cdot S(P_r(m)_{(1)}) \\ &= ((P_r(m) \cdot 1_1)P_r(n)) \cdot S(1_2) \\ &= (P_r(m) \cdot 1_1)(P_r(n) \cdot S(1_2)) = P_r(m)P_r(n) \end{aligned}$$

因此 (M, P_r) 是一个权为 -1 的幂等的 Rota-Baxter 代数。

例 2 设 H, B 为交换的弱 Hopf 代数, 映射 $i: H \rightarrow B$ 和 $j: B \rightarrow H$ 满足 $j \circ i = id_H$ 。定义 q_H^B 为

$$q_H^B = \mu_B(id \otimes i \circ S \circ j)\Delta_B: B \rightarrow B, \text{ 易证 } (q_H^B)^2 = q_H^B。此外 (B, q_H^B) \text{ 是一个权为 } -1 \text{ 的幂等的 Rota-Baxter 代数。}$$

事实上, 易证 B 关于如下作用:

$$b \cdot h = bi(h), \quad \rho_r(b) = b_1 \otimes j(b_2), \quad \forall b \in B, h \in H$$

是一个弱右 H -Hopf 模代数, 且 $(a \cdot 1_1)(b \cdot S(1_2)) = ab$ 。

因为

$$\begin{aligned} \rho_r(q_H^B(b)) &= \rho_r(b_1 \circ S \circ j(b_2)) \\ &= b_{11} \circ S \circ j(b_2)_1 \otimes j(b_{12})j(i \circ S \circ j(b_2)_2) \\ &= b_1 \circ S \circ j(b_4) \otimes j(b_2)S \circ j(b_3) \\ &= b_1 \circ S \circ j(b_3) \otimes \varepsilon_l(j(b_2)) \\ &= b_1 \circ S(1_2 j(b_2)) \otimes S(1_1) = b_1 \circ S \circ j(b_2)i(1_1) \otimes 1_2 \\ &= (b_1 \circ S \circ j(b_2)) \cdot 1_1 \otimes 1_2 = q_H^B(b) \cdot 1_1 \otimes 1_2 \end{aligned}$$

故 q_H^B 是从 B 到 $B^{\text{co}H}$ 的投射。由上述定理知, (B, q_H^B) 是一个权为 -1 的幂等的 Rota-Baxter 代数。

下面我们给出关于弱右 H -Hopf 模代数的构造定理。

定理 2 设 H 是一个弱 Hopf 代数满足 $H_s \subseteq Z(H)$ (H 的中心) 且 (A, μ) 是 ${}^H_H \text{WYD}$ 中的代数, 则 smash 积代数 $A \# H$ 关于如下作用:

$$(a \# h) \cdot x = a \# hx, \quad \rho_r(a \# h) = (a \# h_1) \otimes h_2, \quad \forall h, x \in H, a \in A$$

是一个弱右 H -Hopf 模代数。定义 $P_r(a \# h) = a \# \varepsilon_l(h)$, 则 P_r 是权为 -1 的幂等的 Rota-Baxter 算子。

证 类似于 [1] 中的定理 3.1, 可以证明 $A \# H$ 是弱右

H -Hopf 模代数。对于任意的 $h, g \in H$ 和 $a, b \in A$, 有

$$\begin{aligned} & ((a \# h) \cdot 1_1)((b \# g) \cdot S(1_2)) \\ &= (a \# h 1_1)(b \# g S(1_2)) = a((h 1_1) \cdot b) \# h_2 1_2 g S(1_3) \\ &= a(h_1 \cdot b) \# h_2 1_1 g S(1_2) = a(h_1 \cdot b) \# h_2 g 1_1 S(1_2) = (a \# h)(b \# g) \end{aligned}$$

故由定理 1 知结论成立。

例 3 设 H 是一个弱 Hopf 代数满足 $H_s \subseteq Z(H)$ 。则由参考文献 [5] 中的命题 2.1 知, $H \in {}^H_H \text{WYD}$ 关于如下 Yetter-Drinfeld 模结构:

$$x \cdot h = x_1 h S(x_2), \rho_l(h) = h_1 \otimes h_2, x, h \in H$$

对于任意的 $h, g, g' \in H$, 有

$$\rho_l(hg) = (hg)_1 \otimes (hg)_2 = h_1 g_1 \otimes h_2 g_2 = h_{(-1)} g_{(-1)} \otimes h_{(0)} g_{(0)}$$

和

$$\begin{aligned} (h_1 \cdot g)(h_2 \cdot g') &= h_1 g S(h_2) h_3 g' S(h_4) = h_1 g \varepsilon_s(h_2) g' S(h_3) \\ &= h_1 g 1_1 g' S(1_2) S(h_2) = h_1 g g' S(h_2) = h \cdot (g g') \end{aligned}$$

故 H 是 ${}^H_H \text{WYD}$ 中的代数。因此 $H \# H$ 上的 smash 积代数结构为

$$(h \# x)(g \# y) = h(x_1 \cdot g) \# x_2 y = h x_1 g S(x_2) \# x_3 y$$

对应的 Rota-Baxter 算子 P_r 为 $P_r(h \# x) = h \# \varepsilon_l(x)$ 。

拟三角弱 Hopf 代数^[7] 是一个二元组 (H, R) , 其中 H 是一个弱 Hopf 代数, $R \in \Delta^{op}(1)(H \otimes H)\Delta(1)$ 满足

- (1) 对于任意的 $h \in H$, 有
- $$\begin{aligned} \Delta^{op}(h)R &= R\Delta(h), (id \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}, \\ (\Delta \otimes id)(R) &= R_{13}R_{23} \end{aligned}$$

- (2) 存在 $\bar{R} \in \Delta(1)(H \otimes H)\Delta^{op}(1)$ 满足
- $$R\bar{R} = \Delta^{op}(1), \bar{R}R = \Delta(1)$$

其中 Δ^{op} 是反余乘, $R = R^{(1)} \otimes R^{(2)}$, $\bar{R}$ 称为 R 的弱逆, 若 $\bar{R} = R^{(2)} \otimes R^{(1)}$, 则称 H 是三角的。

例 4 设 (H, R) 为拟三角弱 Hopf 代数且满足

$H_s \subseteq Z(H)$, 对于任意的 H -模 $(M, \cdot)$, 记 $\rho_l(m) = R^{(2)} \otimes R^{(1)} \cdot m$, 易证 $(M, \cdot, \rho_l)$ 为弱 H -Yetter-Drinfeld 模。此外 (H, R) 上任意的弱左 H -模代数 A 是 ${}^H_H \text{WYD}$ 中的代数, 事实上, 对于任意 $a, b \in A$ 有

$$\begin{aligned} \rho_l(ab) &= R^{(2)} \otimes R^{(1)} \cdot (ab) = R^{(2)} \otimes (R^{(1)} \cdot a)(R^{(1)} \cdot b) \\ &= R^{(2)} r^{(2)} \otimes (R^{(1)} \cdot a)(r^{(1)} \cdot b) = a_{(-1)} b_{(-1)} \otimes a_{(0)} b_{(0)} \end{aligned}$$

因此 A 为弱左 H -余模代数, 故 $A \# H$ 上的 Rota-Baxter 算子 P_r 为 $P_r(a \# h) = a \# \varepsilon_l(h)$ 。

参考文献:

- [1] JIAN R Q. Construction of Rota-Baxter algebras via Hopf module algebras[J]. Science China Mathematics, 2014, 57(11): 2321–2328.
- [2] MA T S, LIU L L. Rota-Baxter coalgebras and Rota-Baxter bialgebras[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2016, 64(5): 968–979.
- [3] ZHENG H H, GUO L, ZHANG L Y. Rota-Baxter paired modules and their constructions from Hopf algebras[J]. Journal of Algebra, 2020, 559(1): 601–624.
- [4] BÖHM G, NILL F, SZLACHÁNYI K. Weak Hopf Algebras I: Integral Theory and C*-Structure[J]. Journal of Algebra, 1999, 221(2): 385–438.
- [5] ZHAO X F, LIU G H, WANG S H. Symmetric Pairs in Yetter-Drinfeld categories over Weak Hopf Algebras[J]. Communications in Algebra, 2015, 43(10): 4502–4514.
- [6] GUO L. An introduction to Rota-Baxter algebra[M]. Somerville (MA): International Press; Beijing: Higher Education Press; 2012. xii+226 pp.
- [7] NIKSHYCH D, TURAEV V, VAINERMAN L. Invariants of knots and 3-manifolds from quantum groupoids[J]. Topology and Its Applications, 2003, 127(1–2): 91–123.

Construction of Rota-Baxter Algebras via Weak H -Hopf Module Algebras

LIU Linlin

(Department of Science, Henan Institute of Technology, Xinxiang 453003, China)

Abstract: We provide the definition and the construction theorem of weak H -Hopf module algebras, then we construct Rota-Baxter algebras from weak H -Hopf module algebras and give the concrete examples.

Key words: Rota-Baxter algebra; weak Hopf algebra; weak H -Hopf module algebra

(责任编辑 吕春红)